

教師教學成果發表會

當理論遇見程式
從陌生變成熟識

統計資訊學系 盧宏益





每個人的心靈深處
都有著只有他自己理解的東西。

列夫·托爾斯泰 (1828-1910)



到底要怎麼樣才能衝破行為的表面，
接觸那深藏在底下的真我？
到底怎麼樣才能成為自己？

羅傑斯 Carl Rogers (1902-1987)

1. 數學科目：無趣的事——無趣的人

2. 認真備課：有聽沒有懂——不知為了什麼而忙
教學這件事……

3. 提昇興趣：很難——心靈再度受創

4. 提供學習資源：成效不彰——開始罵老師



真的是他想要的嗎？
真的是他需要的嗎？



與其給的多 不如給的對



不是說你的問題，是說你的故事給我聽

走入心中
教學了解需求輔導
解決問題

數理統計教學的心路歷程

換我說我的故事給你聽

探索
學術之美



輔仁大學 106 學年度入學新生一至四年級必修科目表

院別：管理學院 系(所)別：統計資訊學系 組別：甲、乙 第 1 頁 共 2 頁

中 文 科 目 名 稱	規 定 學 分	一 年 級	二 年 級	三 年 級	四 年 級	備 註
英 文 科 目 名 稱		上	下	上	下	
中：全民國防教育軍事訓練 英：All-out Defense Education Military Training	0	0	0			校訂
中：體育 英：Physical Education	0	0	0	0	0	校訂
中：導師時間 英：Time for Class Advisor	0	0	0	0	0	校訂
中：國文 英：Chinese	4	2	2			校訂
中：歷史與文化學群 英：History and Culture	0	0				納入通識涵養領域學群之一
中：大學入門 英：Introduction to University Studies	2	2				校訂
中：外國語文(英文) 英：Foreign Language	4	2	2			校訂
中：外國語文(英文、日文、法文、德文、 西班牙文、義大利文) 英：Foreign Language	4			2	2	校訂
中：人生哲學 英：Philosophy of Life	4			2	2	校訂
中：專業倫理-企業倫理 英：Professional Ethics-Business Ethics	2				2	校訂
中：統計學 英：Statistics	6	3	3			院訂(學年課) 每學期外加一小時實習
中：微積分 英：Calculus	6	3	3			院訂(學年課) 每學期外加一小時實習
中：經濟學 英：Economics	6	3	3			院訂(學年課) 每學期外加一小時實習
中：會計學 英：Accounting	6			3	3	院訂(學年課) 每學期外加一小時實習
中：企業管理概論 英：Business Administration	3		3			院訂
中：計算機概論 英：Introduction to Computer Science	3	3				院訂 每學期外加一小時實習
中：數理統計 英：Mathematical Statistics	6			3	3	系訂(學年課) 每學期外加一小時實習
中：線性代數 英：Linear Algebra	4			2	2	系訂(學年課) 每學期外加一小時實習
中：程式設計 英：Programming Techniques	3			3		系訂
中：進階程式設計 英：Advanced Programming Techniques	3				3	系訂

數理統計

統計資訊學系大二必修 (3, 3)

數理統計教學年資：10 年

教學目標：學習統計理論及其性質

理論推導上的艱深困難

(範例圖：中央極限定理證明)

7.4 A Proof of the Central Limit Theorem (Optional)

We will sketch a proof of the central limit theorem for the case in which the moment-generating functions exist for the random variables in the sample. The proof depends upon a fundamental result of probability theory, which cannot be proved here but that is stated in Theorem 7.5.

THEOREM 7.5

Let Y and $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$ be random variables with moment-generating functions $m(t)$ and $m_1(t), m_2(t), m_3(t), \dots$, respectively. If

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n(t) = m(t) \quad \text{for all real } t,$$

then the distribution function of Y_n converges to the distribution function of Y as $n \rightarrow \infty$.

We now give the proof of the central limit theorem, Theorem 7.4.

Proof

Write

$$\begin{aligned} U_n &= \sqrt{n} \left(\frac{\bar{Y} - \mu}{\sigma} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{\sum_{i=1}^n Y_i - n\mu}{\sigma} \right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Z_i, \quad \text{where } Z_i = \frac{Y_i - \mu}{\sigma}. \end{aligned}$$

Because the random variables Y_i 's are independent and identically distributed, $Z_i, i = 1, 2, \dots, n$, are independent, and identically distributed with $E(Z_i) = 0$ and $V(Z_i) = 1$.

Since the moment-generating function of the sum of independent random variables is the product of their individual moment-generating functions,

$$m_{\sum Z_i}(t) = m_{Z_1}(t) \times m_{Z_2}(t) \times \dots \times m_{Z_n}(t) = [m_{Z_1}(t)]^n$$

and

$$m_{U_n}(t) = m_{\sum Z_i} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) = \left[m_{Z_1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right]^n.$$

By Taylor's theorem, with remainder (see your *Calculus II* text)

$$m_{Z_1}(t) = m_{Z_1}(0) + m'_{Z_1}(0)t + m''_{Z_1}(\xi) \frac{t^2}{2}, \quad \text{where } 0 < \xi < t,$$

and because $m_{Z_1}(0) = E(e^{0Z_1}) = E(1) = 1$, and $m'_{Z_1}(0) = E(Z_1) = 0$,

$$m_{Z_1}(t) = 1 + \frac{m''_{Z_1}(\xi)}{2} t^2, \quad \text{where } 0 < \xi < t.$$

Therefore,

$$\begin{aligned} m_{U_n}(t) &= \left[1 + \frac{m''_{Z_1}(\xi_n)}{2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^2 \right]^n \\ &= \left[1 + \frac{m''_{Z_1}(\xi_n) t^2 / 2}{n} \right]^n, \quad \text{where } 0 < \xi_n < \frac{t}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Notice that as $n \rightarrow \infty$, $\xi_n \rightarrow 0$ and $m''_{Z_1}(\xi_n) t^2 / 2 \rightarrow m''_{Z_1}(0) t^2 / 2 = E(Z_1^2) t^2 / 2 = t^2 / 2$ because $E(Z_1^2) = V(Z_1) = 1$. Recall that if

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \quad \text{then} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b_n}{n} \right)^n = e^b.$$

Finally,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_{U_n}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{m''_{Z_1}(\xi_n) t^2 / 2}{n} \right]^n = e^{t^2 / 2},$$

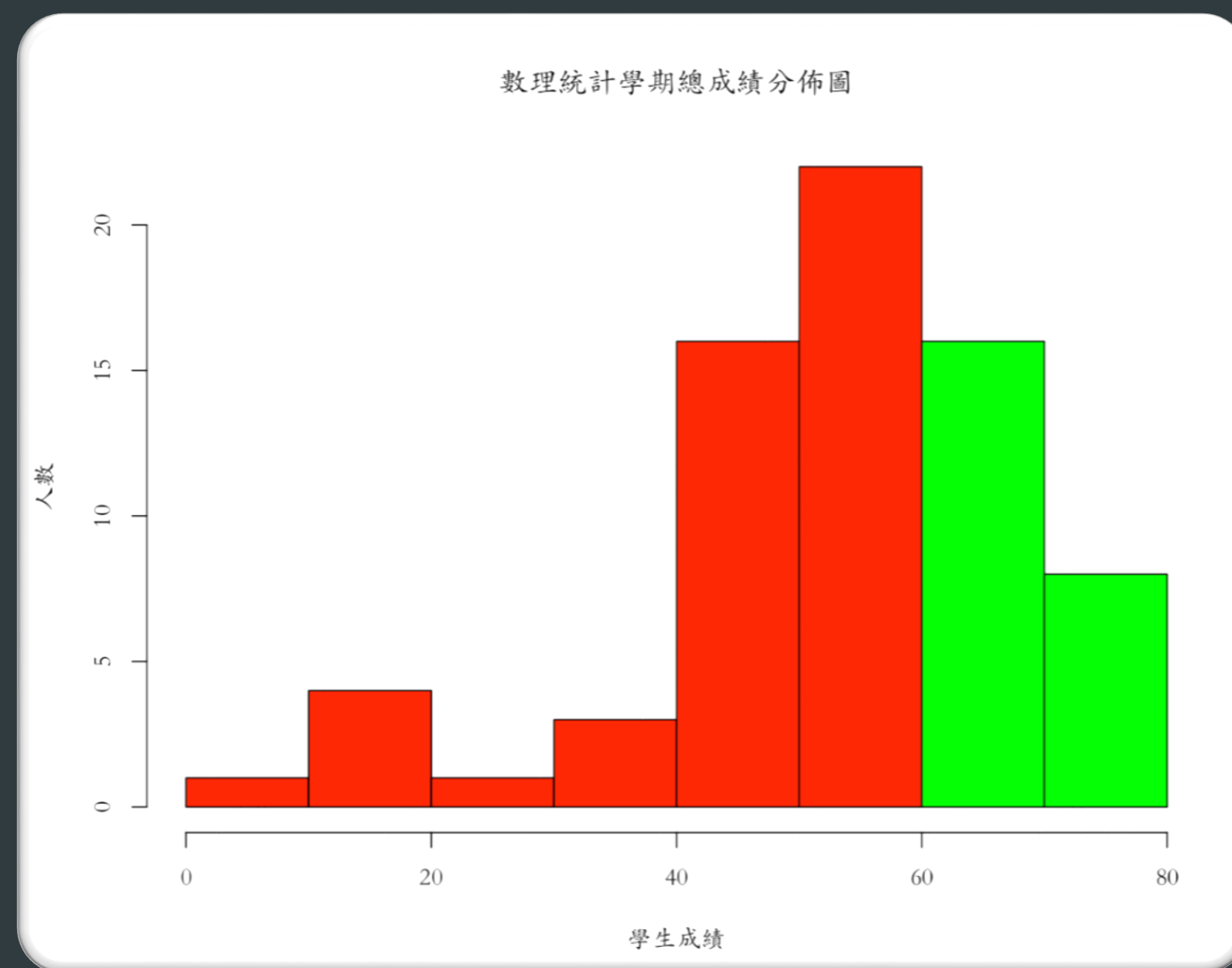
the moment-generating function for a standard normal random variable. Applying Theorem 7.5, we conclude that U_n has a distribution function that converges to the distribution function of the standard normal random variable.

數理

觀察

高淘汰率

低學習成就感學習意願低落



傾聽的必要性

透過教學活動
化傾聽為「主動」傾聽



資訊融入教學

扭轉學習數理統計氛圍

1. 透過資訊視覺化 了解數學 看見統計



2. 透過動手做做中學 了解問題 看見自己



創新教學方法



程式學習

一、電腦輔助教學法

透過程式結合理論，讓學生能以更有效率的方式學習數理統計的抽象概念，進而增進其學習意願。



分組合作

二、合作學習法

將同儕之間的友誼、情感化作為學習動力，透過分組的方式，讓其在學習數理統計的同時也能學習合作概念。



成果發表會

三、發表教學法

舉辦成果發表會，要求學生根據不同的主題發表其在課堂上之所學，有別於考試的方法，採取更生動活潑地方式驗收學生學習成效。

一、電腦輔助教學法

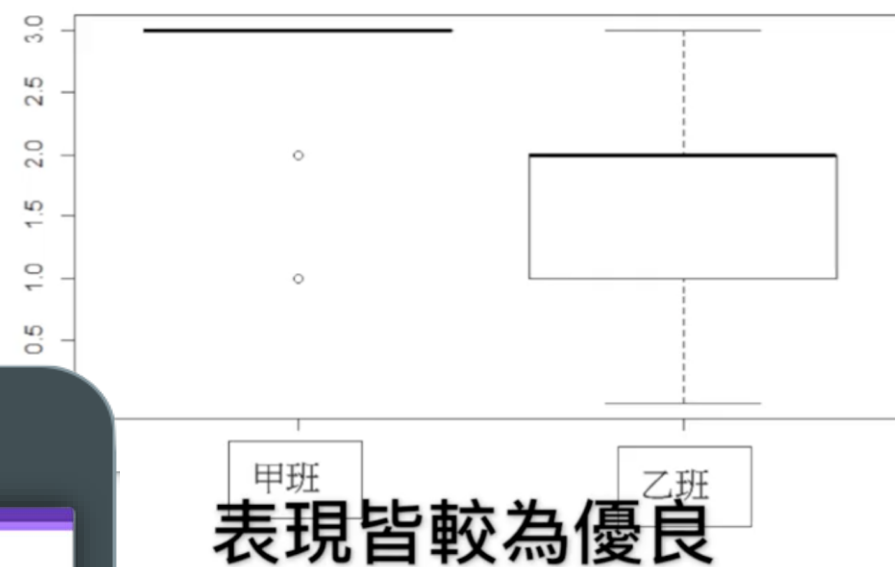
1. 教導學生寫程式（失敗！變成教師撰寫程式）
2. 藉由**動態教案**的呈現，引領學生觀察變化
3. 連結**視覺化圖像**與理論意涵

- 課堂觀察：學生注意力集中，提問增加
- 學生學習成效分析

順序統計量 shiny 測驗(共 3 題，滿分為 3 分)

樣本人數: 甲班 60 人，乙班 66 人

左方為修讀甲班，右方為修讀乙班，發現甲班成績分佈較高。



0430 Sampling Distributions(3)

未命名區段

Let $Y_1, Y_2, \dots, Y_{11}$ be a random sample of size 11 from a normal population with mean 0 and variance 1. Let Y_{12} be another independent observation from the same population. What is the distribution of v ?

(a)

$$\bar{Y} = \sum_{i=1}^{11} Y_i$$

您的回答

(b)

$$W = \sum_{i=1}^{11} Y_i^2$$

您的回答

二、合作學習法

1. 複習統計理論

It can be shown (see Exercise 1.9) that

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^n Y_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n Y_i^2 - n\bar{Y}^2.$$

Hence,

$$E \left[\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \right] = E \left(\sum_{i=1}^n Y_i^2 \right) - nE(\bar{Y}^2) = \sum_{i=1}^n E(Y_i^2) - nE(\bar{Y}^2).$$

Notice that $E(Y_i^2)$ is the same for $i = 1, 2, \dots, n$. We use this and the fact that the variance of a random variable is given by $V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$ to conclude that $E(Y_i^2) = V(Y_i) + [E(Y_i)]^2 = \sigma^2 + \mu^2$, $E(\bar{Y}^2) = V(\bar{Y}) + [E(\bar{Y})]^2 = \sigma^2/n + \mu^2$, and that

$$\begin{aligned} E \left[\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \right] &= \sum_{i=1}^n (\sigma^2 + \mu^2) - n \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \right) \\ &= n(\sigma^2 + \mu^2) - n \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \right) \\ &= n\sigma^2 - \sigma^2 = (n-1)\sigma^2. \end{aligned}$$

2. 教導範例程式

```
r <- 50
ybar <- matrix(0,m,r)
for(j in 1:r){
  for(i in 1:m){
    xbar[i] <- mean(rbinom(sample.size[i], size=10, prob=0.3))/10
  }
  ybar[,j] <- xbar
}
ybar

plot(sample.size, ybar[,1], xlab="Number of observations, n",
      ylab="sample mean", main="Law of Large Numbers",
      type="l", col="red", lwd=1.5)

for(j in 2:50){
  lines(sample.size, ybar[,j], col = 2)
}
abline(h = 0.3, col="blue")
```

3. 分組完成學習單

自Exp(5)抽取n個樣本

1. 在n=5, 50, 500, 5000時，試繪製資料分佈圖。
2. 在n=5, 50, 500, 5000時，計算樣本平均數。重複實驗次數1000次，繪製樣本平均數分佈圖。
3. 承上題，試驗證中央極限定理。



➤ 由教師先行示範基礎程式，並講解
R 程式指令

➤ 再分組進行程式設計指導



學生學習成效分析：八成以上完成

結合R程式與R-shiny於順序統計量之研究

---以常態分配為例

107學年度第二學期 數理統計

學生：金企四甲 404411655 陳彥齊 指導老師：盧宏益 教授



順序統計量之定義 Let $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ denote independent continuous random variables. We denote the ordered random variables Y_i by $Y_{(1)}, Y_{(2)}, \dots, Y_{(n)}$, where

$$Y_{(1)} \leq Y_{(2)} \leq \dots \leq Y_{(n)}.$$

順序統計量之機率分配函數 $g_{(k)}(y_k) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot [F(y_k)]^{k-1} \cdot [1 - F(y_k)]^{n-k} \cdot f(y_k)$, where $-\infty < y_k < \infty$

聯合順序統計量之機率分配函數

$$g_{(j)(k)}(y_j, y_k) = \frac{n!}{(j-1)!(k-1-j)!(n-k)!} \cdot [F(y_j)]^{j-1} \cdot [F(y_k) - F(y_j)]^{k-1-j} \cdot [1 - F(y_k)]^{n-k} \cdot f(y_j) \cdot f(y_k), \text{ where } -\infty < y_j < y_k < \infty$$

例題 Let $Y_1, Y_2, \dots, Y_5$ be independent, standard normally distributed random variables with mean = 0, variance = 1.

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}, \text{ where } -\infty < y < \infty \quad F(y) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot y} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}, \text{ where } -\infty < y < \infty$$

(1) Find the density function of $Y_{(2)}$

$$g_{(2)}(y_2) = \frac{5!}{1!3!} \cdot \left[1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot y_2} \cdot e^{-\frac{y_2^2}{2}} \right] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot y_2} \cdot e^{-\frac{y_2^2}{2}} \right]^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y_2^2}{2}}, \text{ where } -\infty \leq y_2 \leq \infty$$

(2) Find the joint density function of $Y_{(2)}$ and $Y_{(4)}$

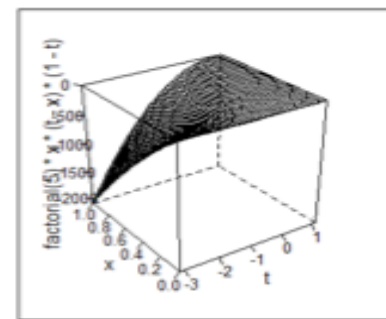
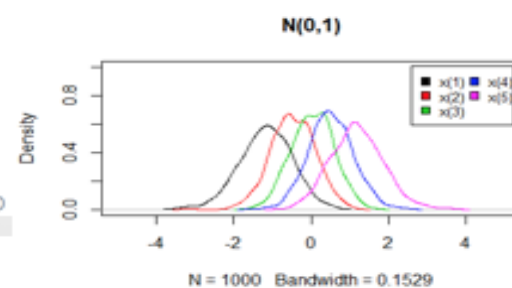
$$g_{(2)(4)}(y_2, y_4) = \frac{5!}{1!1!1!1!} \cdot \left[1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot y_2} \cdot e^{-\frac{y_2^2}{2}} \right] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot y_4} \cdot e^{-\frac{y_4^2}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot y_2} \cdot e^{-\frac{y_2^2}{2}} \right] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot y_4} \cdot e^{-\frac{y_4^2}{2}} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y_2^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y_4^2}{2}}, \text{ where } -\infty \leq y_2 < y_4 \leq \infty$$

(3) 以R程式計算之過程及所得結果

```
#N(0,1)
r = matrix(0,1000,5)
for(i in 1:1000){
  r[i,] = sort(rnorm(5,0,1))
}

plot(density(r[,1]), xlim = c(-5,5), ylim = c(0,1), main = "N(0,1)")
lines(density(r[,2]), col = 2)
lines(density(r[,3]), col = 3)
lines(density(r[,4]), col = 4)
lines(density(r[,5]), col = 5)
name = c("x(1)", "x(2)", "x(3)", "x(4)", "x(5)")
legend(locator(1), name, fill = c(1, 2, 3, 4, 5), ncol = 2, cex = 0.8)

#第二和第四順序統計量
library(mosaic)
library(manipulate)
x=r[,2]
t=r[,4]
plotFun(factorial(5)*x*(t-x)*(1-t)~t&x,t.lim=range(0,x),
,xlim=range(x,1),surface=TRUE,main = "N(0,1)第二跟第四敘述統計量")
```

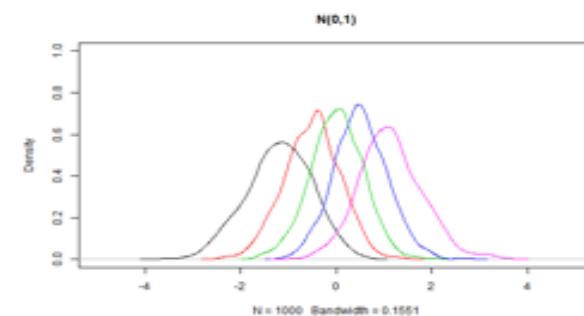


(4) 以R-shiny呈現之結果 (<http://127.0.0.1:5145>)

```
library(shiny)
ui <- fluidPage(
  sidebarLayout(
    sidebarPanel(
      checkboxInput("x1", "x(1)", value = TRUE),
      checkboxInput("x2", "x(2)", value = FALSE),
      checkboxInput("x3", "x(3)", value = FALSE),
      checkboxInput("x4", "x(4)", value = FALSE),
      checkboxInput("x5", "x(5)", value = FALSE)
    ),
    mainPanel(
      plotOutput("x1")
    )
  )
)
server <- function(input, output){
  r = matrix(0,1000,5)
  for(i in 1:1000){
    r[i,] = sort(rnorm(5,0,1))
  }
  output$x1 <- renderPlot({
    plot(density(r[,1]), xlim = c(-5,5), ylim = c(0,1), main = "N(0,1)", type="n")
    if(input$x1 == TRUE) lines(density(r[,1]), col = 1)
    if(input$x2 == TRUE) lines(density(r[,2]), col = 2)
    if(input$x3 == TRUE) lines(density(r[,3]), col = 3)
    if(input$x4 == TRUE) lines(density(r[,4]), col = 4)
    if(input$x5 == TRUE) lines(density(r[,5]), col = 5)
  })
}
shinyApp(ui = ui, server = server)
```

順序統計量

☒ x(1)
☐ x(2)
☐ x(3)
☐ x(4)
☐ x(5)



三、發表教學法

準備過程: 配題、進斷理、誦推、溝通、摩擦、撰寫

發表與觀察: 期中、期末、發表會、觀念清楚

發表受教師提問 (統資*4, 會計*3, 經濟*1)



➤ 邀請本系及外系老師進行講評，
參與人數皆達 200 人以上

➤ 學生站在海報牆前，等待發表



教學反思

Teaching Reflection

現實面的考量

考量一

時間

現有課程緊湊
無法所有單元
融入視覺化教學

考量二

成效

學生課業繁重
增加其學習負擔
可能顧此失彼

考量三

意外

學生一旦無法前來上課
將造成進度嚴重落後
(肺炎造成全球大學停課)

考量到上述可能發生的問題，目前持續進行更為詳盡的改善以及規劃，
以達到創新教學的宗旨。

未來展望—流程規劃

TARGET MILESTONES

流程一

01

學習網站的建立(進行中)

流程二

02

學習診斷整合適性測驗與適性教學

流程三

03

提供互動式「適性」數位學習平台結合

一位大學教師的工作內容

引領學生發現學習問題
找到自己的解決方法

教學

01

02

研究

Adaptive design
(Optimal design)

輔導

03

04

服務

陪伴、傾聽
同理心

實踐學以致用的精神

**Give a man a fish, and you feed him for a day;
teach him how to fish, and you feed him for a lifetime.**



了解他、陪伴他
生命終會找到自己的出口



有幸能成為一名教師
有喜有樂

教師的職業是太陽底下最光輝的職業。

—捷克教育家 誇美紐斯